楽しい時間周波数解析 ver 1.0

河原　創

November 23, 2016

簡単なレシピ

時系列データから周波数成分を時間の関数としてとりだす解析方法を時間周波数解析という。まずは Spectrogram でおおまかな時間周波数分布 (TFD) を観察しよう。そして、Pseudo Wigner Distribution を試してみよう。瞬時周波数 (IF) は pseudo Wigner distribution の TFD の ridge をとることで抽出できる。非線形性の強い IF であれば、pseudo Wigner distribution の window を調整しよう。IF が多成分でありそうなら、代わりに S-method や高次の Wigner distribution を使用してみよう。Julia が好きなら juwvid を使えば、すぐにあなたのデータを時間周波数解析できます。本文章は、2016 年 3/3 の統計・解析ゼミ用に作成したものです。

Contents

1 Getting Started **2**
- 1.1 juwvid . . . 2
- 1.2 Packages for Time-Frequency Analysis . . . 3

2 Signal Processing の基礎 **3**
- 2.1 Analytic signal . . . 3
- 2.2 Analytic Signal の物理的意味 . . . 5
- 2.3 Instantaneous Frequency . . . 5

3 Spectrogram と Wigner Distribution **6**
- 3.1 Short Time Fourier Transform と Spectrogram . . . 6
- 3.2 Wigner Distribution と Pseudo Wigner Distribution . . . 7
- 3.3 Wigner Distribution の marginal property . . . 9
- 3.4 TFD as an IF estimator . . . 9
- 3.5 STFT、Wigner Distribution, Pseudo Wigner Distribution の各特性 . . . 10

4 Nonlinear IF と Pseudo Wigner Distribution の Window **12**
- 4.1 Window 依存性 . . . 12
- 4.2 Adaptive Algorithm . . . 13

5 Multicomponent signal に対処する **13**
- 5.1 S-method . . . 15
- 5.2 Higher Order Wigner Distribution . . . 17

6 楽しげな応用 18
6.1 重力波 18

1 Getting Started

本稿では、時系列の周波数を時間の関数として取り出す time-frequency distribution(TFD)、特に Wigner distribution 周辺の TFD を考える。[1] 教科書としては Cohen [2], Stankovic ら [3]、Boashash らによるもの [1] を参照してほしい。本稿では、まあ、細かいことは抜きに、時間周波数解析のときにどういうった解析を選ぶかなどの実際の選択を、今回の経験からえた私の理解の範囲で、記していこうと思う。

1.1 juwvid

統計・解析ゼミでは、実際、使えることを重要視していることから、私が Julia で書いた

- **juwvid**

をもちいて、具体例の解説を行う。
juwvid に必要なものは

- Julia (本稿執筆時点では version 0.4.2)

である。Julia は、Python に似た形式で Fortran 並みの速度が出る (とされている) すばらしい (とされている) 言語である。

Julia の package として DSP、PyPlot、Distributions が必要である。これらは Julia コンソール上で

```
Pkg.add("DSP")
```

のようにしてインストールできる。

また Jupyter のインストールは、いろいろあるが、例えば pip で

```
pip install ipython[notebook] -U
```

として、Julia コンソールで

```
Pkg.add("IJulia")
```

などとしてもよいだろう。
juwvid は、nonunifrom-FFT の Fortran code (CMCL/NUFFT) をラップしている。Makefile を適宜直し、

```
make
```

することで、ライブラリ libnufft.so が生成される。次に、ラッパー **jnufft.jl** のなかの CCALL のパスを二カ所直す (default では"/Users/kawahara/juwvid/libnufft.so"となっている) ことで NUFFT が使えるようになる。

また環境変数

[1] Wavelet transform に代表される time-scale representation は似たような考え方であるが、この場合、スケールと周波数の変換は mother wavelet に依存する。

```
JULIA\_LOAD\_PATH
```

に juwvid のディレクトリ位置を指定しよう。これでどこでも juwvid の module が使用できるようになる。

本文中の例や図は juwvid/ipynb にある Jupyter notebook から reproduce できる。執筆時点での juwvid の ipython notebook を以下に示す。

- Application to LIGO data.ipynb
- L-Wigner Distribution and Polynomial Wigner Ville Distribution.ipynb
- Polynomial Wigner Ville distribution with NuFFT.ipynb
- Pseudo Wigner Ville Distribution for the nonlinear IF using FFT and NUFFT.ipynb
- S-Method with NuFFT.ipynb
- S-Method.ipynb
- STFT, Wigner, and Pseudo Wigner.ipynb
- Thinning time grids.ipynb
- Wigner Ville Distribution with FFT and NUFFT.ipynb
- Window selection of the pseudo WV and the adaptive algorithm.ipynb

1.2 Packages for Time-Frequency Analysis

Time-Frequency Analysis のプロが作ったパッケージが他にもちろん存在する。大抵 MATLAB パッケージである。

- tftb – MATLAB、Octave 用。ただし C の翻訳版もある。juwvid は、tftb の matlab code から julia に翻訳したものを元にしたコードが幾つかある。ソースファイルあり。
- tfsa – MATLAB 用。ソースの公開が無く、Windows と Linux に対応 (mac はダメ)。

juwvid は、素人の私がつくったので、不具合はまあいろいろあるかもしれないが、他のパッケージにはおそらく実装されていない機能が一つついている。それが non-uniform FFT の実装であり、これを用いることで調べたい周波数レンジのサンプリングを高め、周波数変調のレンジが小さい場合に効率よく計算できるようになっている。

2 Signal Processing の基礎

2.1 Analytic signal

実信号 $s(t)$ に対し、そのフーリエ共役を正の領域だけでフーリエ (逆) 変換したもの、すなわち、

$$z(t) = \frac{2}{2\pi}\int_0^\infty d\omega \tilde{s}(\omega) e^{i\omega t} \tag{1}$$

を $s(t)$ の analytic signal (解析信号) [2] という。$\tilde{s}(\omega)$ は $s(t)$ のフーリエ共役である。つまり

$$\tilde{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt s(t) e^{-i\omega t} \tag{2}$$

である。式 (2) を式 (1) に代入すると

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt' s(t') \int_{0}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} && (3)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt' s(t') \left[\pi\delta(t-t') + \frac{i}{t-t'}\right] && (4)\\ &= s(t) + \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{s(t')}{t-t'} && (5)\\ &= s(t) + i\mathcal{H}[s(t)] && (6) \end{aligned}$$

となる。ここに $\mathcal{H}[s(t)]$ は Hilbert 変換

$$\mathcal{H}[s(t)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{s(t')}{t-t'} \tag{7}$$

である [3]。これから分かるように式 (1) で 2 をかけてあるのは、analytic signal の実部を $s(t)$ に一致させるためである。さてこの analytic signal を作る操作を汎関数として定義しておこう。

$$\mathcal{A}[s(t)] \equiv s(t) + i\mathcal{H}[s(t)] \tag{8}$$

式からわかるようにこの変換は線形である。

例 1: $s(t) = e^{i\omega t}$

まず $s(t) = e^{i\omega t}$ は、フーリエ変換が ω の位置のデルタ関数になるため、式 (1) より、明らかに

$$z(t) = \mathcal{A}[e^{i\omega t}] = \begin{cases} 0 & \text{for } \omega < 0 \\ 2e^{i\omega t} & \text{for } \omega \geq 0 \end{cases} \tag{9}$$

となることが分かる。

例 2: $s(t) = \cos(\omega t),\ (\omega \geq 0)$

$s(t) = \cos(\omega t)$ $(\omega \geq 0)$ は、前問の結果より exponential の肩の係数が負のものを消して、

$$\begin{aligned} z(t) &= \mathcal{A}[\cos(\omega t)] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{A}[e^{i\omega t}] + \mathcal{A}[e^{-i\omega t}]\right) && (10)\\ &= e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) && (11) \end{aligned}$$

となる。

[2] analytic equivalent, analytic associate とも。

[3] 多くの Singnal processing のコードでは、Hilbert 変換のこの定義に-1 をかけたものを使用しているようだ。scipy.fftpack.hilbert ではこの定義、julia DSP.hilbert、MATLAB の hilbert、scipy.signal.hilbert では-1 をかけたものを使用しているのを確認した。

2.2 Analytic Signal の物理的意味

analytic signal は複素数なので、実数 $A(t), \psi(t)$ を用いた極座標形式

$$z(t) = A(t)e^{i\psi(t)} \tag{12}$$

のように表すことができる。$A(t)$ は instantaneous amplitude であり、$\psi(t)$ は instantaneous phase である。

そもそも信号を式 (12) のように表すやり方は quadrature model とよばれる。しかし、一般には信号を $A(t)$ と $\psi(t)$ にどのように分けるかは任意である。その点、analytic signal では、一意に Amplitude と phase が決まるわけだが、その意味はなんだろうか？

例えば、二つの正弦波の積の場合、$s(t) = \cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$, $(\omega_2 \geq \omega_1 \geq 0)$ の analytic signal はどうなるだろうか。この場合、

$$\begin{aligned}
z(t) &= \mathcal{A}[\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)] && (13)\\
&= \frac{1}{4}\left(\mathcal{A}[e^{i(\omega_1+\omega_2)}] + \mathcal{A}[e^{-i(\omega_1+\omega_2)}] + \mathcal{A}[e^{i(\omega_1-\omega_2)}] + \mathcal{A}[e^{-i(\omega_1-\omega_2)}]\right) && (14)\\
&= \frac{1}{4}\left(\mathcal{A}[e^{i(\omega_1+\omega_2)}] + \mathcal{A}[e^{-i(\omega_1-\omega_2)}]\right) && (15)\\
&= \frac{1}{2}e^{i\omega_2 t}\left(e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}\right) && (16)\\
&= \cos(\omega_1 t)e^{i\omega_2 t} && (17)
\end{aligned}$$

となる。これは複数の周波数成分の積からなる解析信号においては、周波数の低いほうの成分が Amplitude として、高いほうの成分が phase として表現されることを示唆する。これを一般的にいったものが Bedrosian's theorem である (Bedrosian 1962,Rand Corporation Memorandum,RM-3439-PR)。

いま、一般に quadrature model、$z(t) = A(t)e^{i\psi(t)}$ において amplitude、phase のフーリエ変換をそれぞれ

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_A(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(t)e^{-i\omega t} && (18)\\
\tilde{z}_\psi(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\psi(t)}e^{-i\omega t} && (19)
\end{aligned}$$

とおこう。フーリエ変換の積の分割公式より

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dt z(t)e^{i\omega t} &= \tilde{z}_A(\omega) * \tilde{z}_\psi(\omega) && (20)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \tilde{z}_A(\omega-\omega') * \tilde{z}_\psi(\omega') && (21)
\end{aligned}$$

である。もし $z(t)$ が analytic signal ならば、負の成分をもたないので、Amplitude が $-\omega_1$ から ω_1 の間にゼロでない成分をもつならば、phase は $\omega \leq \omega_1$ の成分はゼロでないとならない。

2.3 Instantaneous Frequency

Instantneous Frequency の直感的な定義は phase の時間微分である。ここに phase をどう定義するかという問題があるものの、ここでは analytic signal の instantaneous phase を時間微分したものを instantaneous frequency (IF) と定義する。

角周波数の表し方では

$$\omega_i(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} \tag{22}$$

もしくは周波数の表し方では、

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\psi(t)}{dt} \tag{23}$$

となる。後にみるようにこの IF がどういう関数か、何成分かによって最適な TFD の選択が変わってくる。

3 Spectrogram と Wigner Distribution

Time-Frequency Distribution (TFD) とは、信号を時間周波数成分の二次元に展開し表示したものを言う。本 Section では、典型的な TFD として、Short-Time Fourier Transform (STFT)、Winger Distribution, Pseudo Wigner distribution を導入し比較する。

＊＊＊ **Juwvid** ＊＊＊

本 Section の対応 notebook は、

- **STFT, Wigner, and Pseudo Wigner.ipynb**

である。

Short Time Frequency Transfrom は

```
tfrst=stft.tfrstft(y)
```

のように計算できる。

Wigner Ville Distribution、Pseudo Wigner Ville Distribution は、DSP パッケージで

```
z=DSP.Util.hilbert(y)
```

のように analytic signal を生成した後

```
tfrs=cohenclass.tfrwv(z)
tfrps=cohenclass.tfrpwv(z)
```

のようにすればそれぞれ計算できる。

3.1 Short Time Fourier Transform と Spectrogram

TFD のもっとも古くからあるものとしてフーリエ変換に窓をつけて時間方向に動かした Short-Time Fourier Transform (STFT) があげられる。

$$S(f,t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)w(t-\tau)e^{-2\pi i f\tau}d\tau \tag{24}$$

STFT を時間、周波数方向に表示し自乗ノルムをとったもの

$$\rho(f,t) = |S(f,t)|^2 \tag{25}$$

を Spectrogram と呼ぶ。STFT は、周波数方向の情報の集中度が高くない。また時間周波数の不確定性関係があるため時間分解能をあげると周波数分解能が下がる。これは式 (24) が window とシグナルの積のフーリエ変換である事から、

$$|S(f,t)|^2 = |\tilde{y}(f) * \tilde{\hat{w}}(f)|^2 \tag{26}$$

$$\hat{w}(\tau) \equiv w(t-\tau) \tag{27}$$

のようになる。時間空間で window 幅が小さいと、周波数空間で畳み込まれる window 幅が大きくなりなまる。逆もまたしかり。このように時間分解能と周波数分解能のトレードオフが生じる (図 1)。

Spectrogram は、意味が明快で解釈も容易である、また後にみるように multi component であっても artifact は出ないこと (ただし分離にはあまりむいていない) から、TFD としてはまず行ってみるべき基本の解析である。しかし、Spectrogram と IF を結びつける理論的関係はなく、IF 推定には向かないかもしれない。次にみるように Wigner Distribution は IF から直接導かれ、よく IF 推定に用いられている。

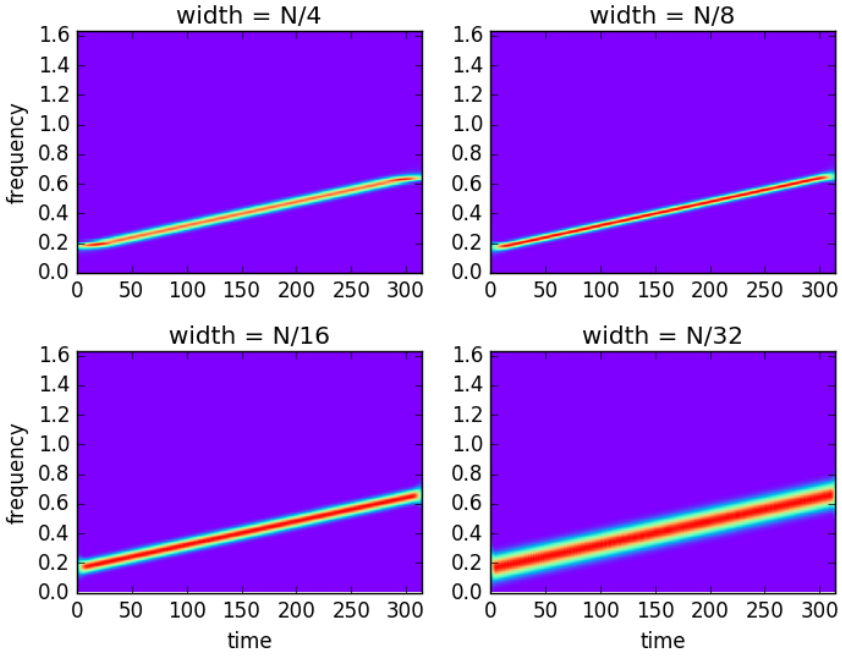

Figure 1: STFT の window size 依存性

3.2 Wigner Distribution と Pseudo Wigner Distribution

Wigner Distribution は、IF と直接関係している量であり、IF 推定の際に特に役立つ。いま解析信号を $z(t) = e^{i\psi(t)}$ とおく。$\psi(t)$ は瞬時位相 (instantaneous phase) である。IF は

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}. \tag{28}$$

と定義される。

理想的な TFD は、デルタ関数 $\delta_D(x)$ を用いて

$$\rho(f,t) \propto \delta_D(f - f_i(t)), \tag{29}$$

のように表されるであろう。

上記のような場合、$\rho(f,t)$ の f から τ の逆フーリエ変換は

$$\hat{\rho}(\tau,t) = e^{2\pi i f_i(t)\tau} = \exp\left(i\tau\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\right). \tag{30}$$

となる。

ここで、Instantaneous phase を小さな時間ステップ τ に対し、

$$\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} \approx \frac{\psi(t+\tau/2) - \psi(t+\tau/2)}{\tau}, \tag{31}$$

のように近似することを考える。 さてこの近似を式 30 に代入して、フーリエ変換すると

$$\begin{aligned}
\rho(f,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\rho}(f,\tau)e^{-2\pi i f\tau}d\tau & (32)\\
&\approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\psi(t+\tau/2) - i\psi(t+\tau/2)\right]e^{-2\pi i f\tau}d\tau & (33)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} z(t+\tau/2)z^*(t-\tau/2)e^{-2\pi i f\tau}d\tau & (34)
\end{aligned}$$

となる。これが Winger-Ville Distribution である。

Boashash 2015 [1] によると、Wigner distribution に変数として解析信号をいれたものを Wigner-Ville distribution と呼んでいるが、文献によっては、解析信号をいれたものも Wigner Distribution と呼んでいるが、本テキストではこの違いはあまり気にしない。

Pseudo Wigner distribution は、Wigner distribution に window をつけたものである。window をつけることにより、興味のある t 付近での情報を強調する効果と、cross-term を抑制する効果がある。[2],

$$\rho(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)z(t+\tau/2)z^*(t-\tau/2)e^{-2\pi i f\tau}d\tau. \tag{35}$$

Pseudo-Wigner distribution は、Wigner distribution と window の複素共役の convolution の形で書ける。

$$\rho(t,f) = \tilde{h} * \rho(f,t), \tag{36}$$

このことより Pseudo-Wigner distribution は、Wigner distribution を frequency domain にスムージングしたものであることが分かる [3]。

Window としては rectangular や Hamming window

$$\begin{aligned}
h(\tau) &= 0.54 + 0.46\cos\left(2\pi\frac{\tau}{\omega}\right) \quad \text{for } |\tau| \le \omega/2\\
&= 0 \quad \text{otherwise} & (37)\\
& & (38)
\end{aligned}$$

など各種が用いられる。

3.3 Wigner Distribution の marginal property

Wigner Distribution には、時間または周波数による境界化でシグナルのパワーが回復するという顕著な性質がある。まず、式 (34) より逆フーリエ変換より

$$z(t+\tau/2)z^*(t-\tau/2) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(f,t)e^{2\pi i f\tau}df \tag{39}$$

となる。ここで $\tau = 0$ を取れば、

$$|z(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(f,t)df \tag{40}$$

となり、確かに Wigner Distribution を周波数方向に積分すると、実空間のノルムが現われる。

また、

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \rho(f,t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} z(t+\tau/2)z^*(t-\tau/2)e^{-2\pi i f\tau}d\tau dt &(41)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} z(t_1)z^*(t_2)e^{-2\pi i f(t_1-t_2)}dt_1dt_2 &(42)\\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} z(t_1)e^{-2\pi i f t_1}dt_1\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} z^*(t_2)e^{+2\pi i f t_1}dt_2\right) &(43)\\
&= |\tilde{z}(f)|^2 &(44)
\end{aligned}$$

ここで $t_1 \equiv t+\tau/2$,$t_2 \equiv t-\tau/2$ としている。Jacobian の絶対値は 1 である。このように、時間方向の積分でもシグナル（の周波数空間での）のノルムが現われる。

3.4 TFD as an IF estimator

各時間での TFD の周波数重心が IF になる。これは以下のように理解できる。まず式 (39) を τ で微分すると

$$\frac{d}{d\tau}[z(t+\tau/2)z^*(t-\tau/2)] = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i f\rho(f,t)e^{2\pi i f\tau}df \tag{45}$$

$z(t) = A(t)e^{i\psi(t)}$ を代入し $\tau = 0$ での微分を計算すると

$$\begin{aligned}
2\pi i\int_{-\infty}^{\infty} f\rho(f,t)df &= \frac{1}{2}\left[z'(t)z^*(t) - z(t)z^{*\prime}(t)\right] &(46)\\
&= iA^2(t)\psi'(t) &(47)
\end{aligned}$$

となる。式 (40) より、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(f,t)df = A^2(t) \tag{48}$$

なので、式 (47) を式 (49) でわると、

$$f_i(t) = \frac{\psi'(t)}{2\pi} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f\rho(f,t)df}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho(f,t)df} \tag{49}$$

となり、重心が IF に一致する。

実際上はノイズの影響を減らす目的や多成分 IF 系の影響を排除するために、各時刻における TFD の最大値を IF の推定値として利用することが多い。すなわち

$$f_{i,\mathrm{est}}(t) = \mathrm{argmax}_{[f_i,f_j]}\rho(t,f), \tag{50}$$

を IF の推定値として利用する。ここに $[f_i, f_j]$ は興味のある周波数レンジである。

＊＊＊ **Juwvid** ＊＊＊

```
indf=extif.maxif(abs(TFD))
```

で TFD から TFD 最大値列の index 値を取り出し、

```
fn=juwutils.index_to_frequency(indf, NaN, dt ,nsample)
```

によって推定 IF(物理単位) に変換できる

3.5 STFT、Wigner Distribution, Pseudo Wigner Distribution の各特性

a. Single component linear signal

まず、単一成分の Linear FM、すなわち IF が時間の線形関数の場合の各 TFD を図 2 左にしめす。Wigner Distribution は、導出時の式 (31) から分かるように線形の場合、正しく IF が導出される。また Wigner Distribution が最も信号が集中しているのがわかる。

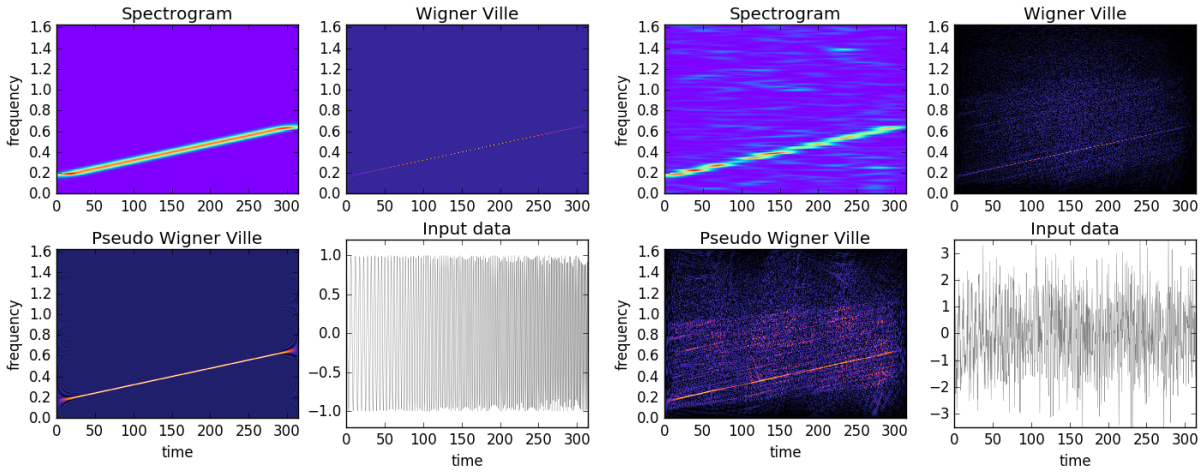

Figure 2: 単一成分線形 IF データの TFD(STFT 左上, Wigner 右上, Pseudo Wigner 左下, input data)、左 4 パネル:ノイズ無し、右 4 パネルノイズあり。

図 2 右は、これに std で 150%のノイズを付加したものである。Wigner, Pseudo Wigner ともに STFT よりはノイズの影響を受けにくい。

b. Single component nonlinear signal

図 3 左は、nonlinear な IF の例である。ここでは正弦関数の形の IF を持つシグナルの TFD を表示している。Wigner Distribution では nonlinear IF の場合、artificial が出やすい。しかし window をつけて領域をせばめて解析している pseudo Wigner Distribution ではこの artificial を抑えることができる。また、STFT ではピークの値が input IF からよりバイアスされてしまっていることに注意。

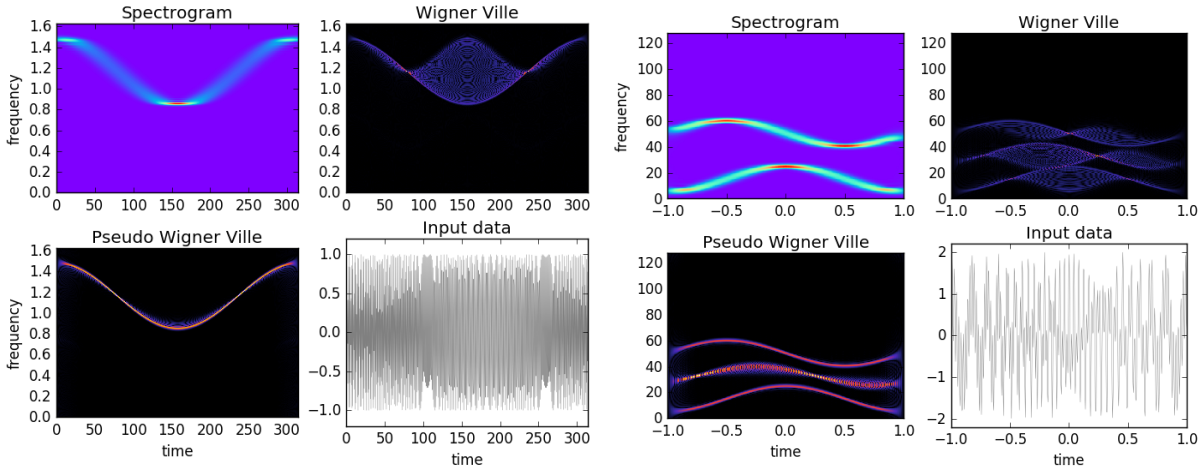

Figure 3: 左 4 パネル:単一成分非線形 IF データの TFD、右 4 パネル: 二成分非線形 IF データの TFD。

c. Multi component nonlinear signal

最後に二つの nonlinear IF の和で書かれる信号の場合が図 3 右である。STFT は、IF と一致するかはともかく、きれいに二成分が分かれている。しかし、Wigner 分布はもとより、Pseudo Wigner でも、二つの成分の間に cross talk 項がみられる。これは Winger distribution 系列は、シグナル同士のかけ算を用いるために生じる cross talk 項である。これらを解決するためには、もう少し、ことなる TFD が必要である。

小まとめ

TFD を distort するものとしてランダムノイズ以外にも

- IF の nonlinearity
- 多成分 IF

が大きな要因となる。解析するシグナルがどのようなものか、何を求めたいかにより、最適な TFD が変わってくることがわかるであろう。Section 4 では、nonlinearlity について、Section 5 では多成分 IF についての影響を緩和する方法を示す。

4 Nonlinear IF と Pseudo Wigner Distribution の Window

＊＊＊ **Juwvid** ＊＊＊

本 Section の対応 notebook は、

- **Window selection of the pseudo WV and the adaptive algorithm.ipynb**

である。

Pseudo Wigner Distribution の Window size を変更するには

```
tfrp16=cohenclass.tfrpwv(z,NaN,NaN,NaN,NaN,NaN,0,''mean'',16)
```

のようにする。この場合、時間方向のサンプル数を N としたとき、window size=N/16 が選ばれる。default では Hamming window が使用される。

4.1 Window 依存性

前 Section でみたように、本来、Wigner distribution は、線形の IF に対応して作られたものなので、非線形 IF に対しては必ずしも上手くいかない。Window をつけ解析領域を制限した Pseudo Wigner Distribution では、問題が緩和されたのをみた。ここでは非線形 IF に対し、window size がどのような影響をするかみてみよう。

まず、非線形な IF

$$f(t) = 1 + e^{-t^2/100} \tag{51}$$

をもつシグナルを作成しよう。これには、instantaneous phase $\psi(t)$ を用いて、

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos\psi(t) \\ &= \cos\left(\int_{-\infty}^{t} dt \frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\right) \\ &= \cos\int_{-\infty}^{t} [2\pi f(t)]\, dt \end{aligned} \tag{52}$$

のようにシグナルを生成すれば良いことが分かる。N この時間間隔 Δt の離散データでは

$$y(t_i) = \cos\left[\frac{1}{N\delta t}\sum_{k=1}^{i}\frac{f(t_k)}{2\pi}\right] \tag{53}$$

に対応する。

図 4 は、このシグナルに対し、window size=$N/4$,$N/8$,$N/16$,$N/32$ の pseudo Wigner distribution とそれを用いて推定した IF である。このように IF の非線形性のスケールより大きな window サイズを取ってしまうと推定 IF に大きなバイアスがでてしまう。

かといって、いくらでも小さい Window を選ぶと良いわけではない。図 5 は 50% STD ノイズをいれて同じ問題を扱ったものだが、非線形部分以外は大きい Window size のほうが精度よく IF を推定できる。

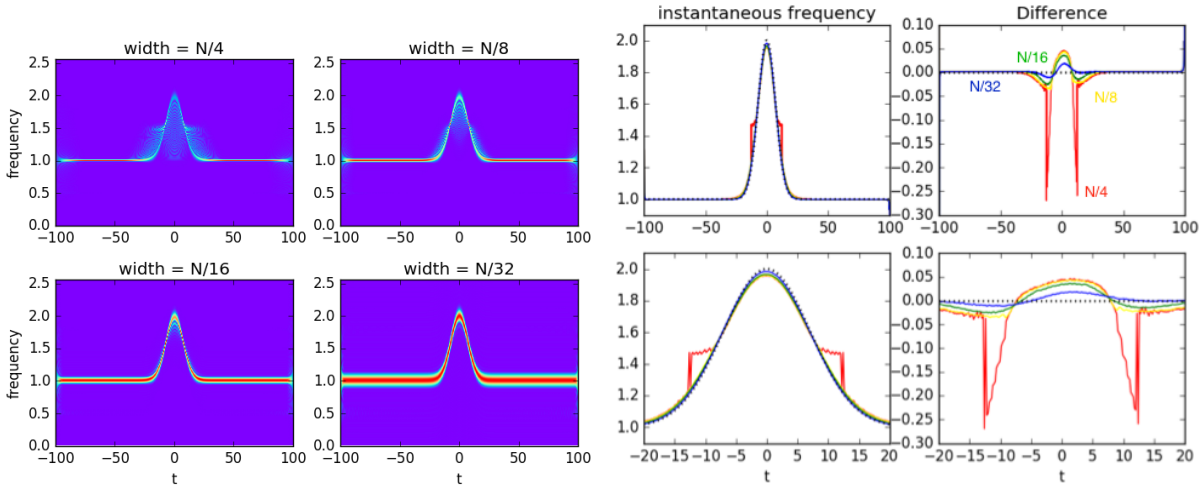

Figure 4: 非線形 IF シグナルに対する Pseudo Wigner distribution の Window size 依存性。左は TFD。右は推定 IF とその誤差。

4.2 Adaptive Algorithm

さてそういうわけで、IF の挙動とノイズレベルに対して、Window を時間方向に adaptive に変える事が出来れば、より最適な IF 推定ができるようになるだろう。Stankovic ら [3] には、adaptive algorithm の具体的なレシピが記されているが、ここでは割愛して、彼らの結果の再現だけ図 6 と 9 に示す。この例では、さきほどよりさらに非線形の強い、ほぼ step function 状の IF をもつシグナルを用いている。

＊＊＊ **Juwvid** ＊＊＊

adaptive algprithm は

```
tfra,windows=pwvaw.awpwv(z,varrat,NaN,NaN,NaN,NaN,2.0,0.39,4,''Hamming'');
```

のように用いられる。varrat にはデータ分散の推定値の時間列を代入する。2.0, 0.39 は、kappa=2.0, delta kappa=0.39 を意味し、ノイズ criterion を指定するが、詳しくは Stankovic を参照のこと。4 は私がオリジナルに付け加えた機能で outlier をある程度除去できる。

5 Multicomponent signal に対処する

本 Section では、多成分 IF を持つシグナルを考える。ここでいう多成分とは、単成分の IF を持つシグナルの線形和で書きあらわされるもののことである。Boashash+2015 [1] の Example 6.2.2, 6.2.3 に従い、

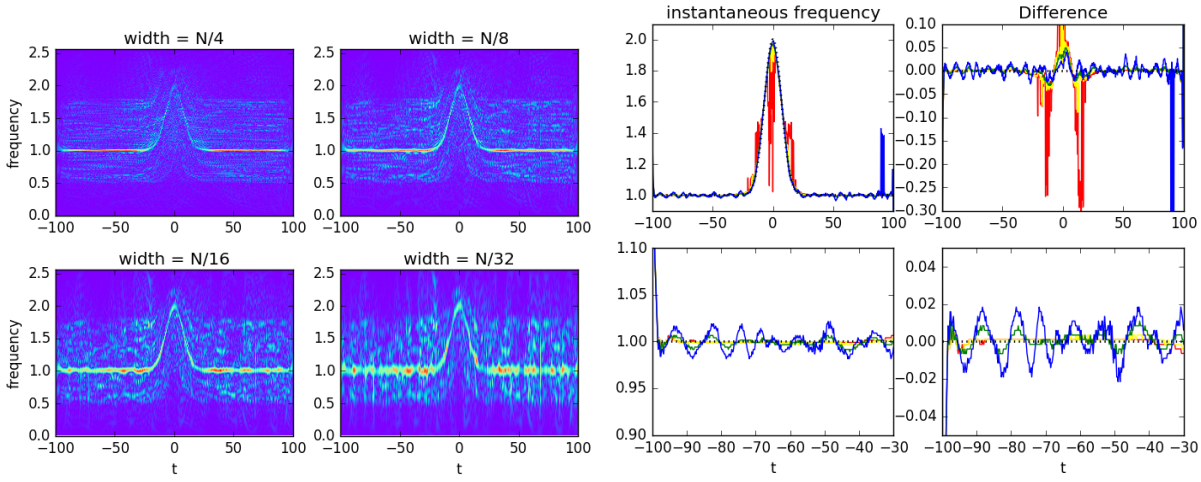

Figure 5: 図 4 のシグナルに誤差 (STD で 50%) がある場合。

M1:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= e^{-t^2}\cos\psi_1(t) + \cos\psi_2(t) + 1.5e^{-25t^2}\cos\psi_3(t) && (54)\\
\psi_1(t) &= 25\pi t && (55)\\
\psi_2(t) &= 120t^3 + 45\pi t && (56)\\
\psi_3(t) &= 40\pi t^2 + 150\pi t && (57)
\end{aligned}
$$

のデータ $(-1 \le t \le 1)$ と
M2:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \cos\psi_1(t) + \sin\psi_2(t) && (58)\\
\psi_1(t) &= 20\sin(\pi t) + 30\pi t && (59)\\
\psi_2(t) &= 20\cos(\pi t) + 100\pi t && (60)
\end{aligned}
$$

のデータ $(-1 \le t \le 1)$ を考えよう (図 8)。
M1,M2 の IF はそれぞれ
M1:

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\psi_1(t)}{\partial t} = 12.5 && (61)\\
f_2(t) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\psi_2(t)}{\partial t} = 180t^2/\pi + 22.5 && (62)\\
f_3(t) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\psi_3(t)}{\partial t} = 40t + 150\pi && (63)
\end{aligned}
$$

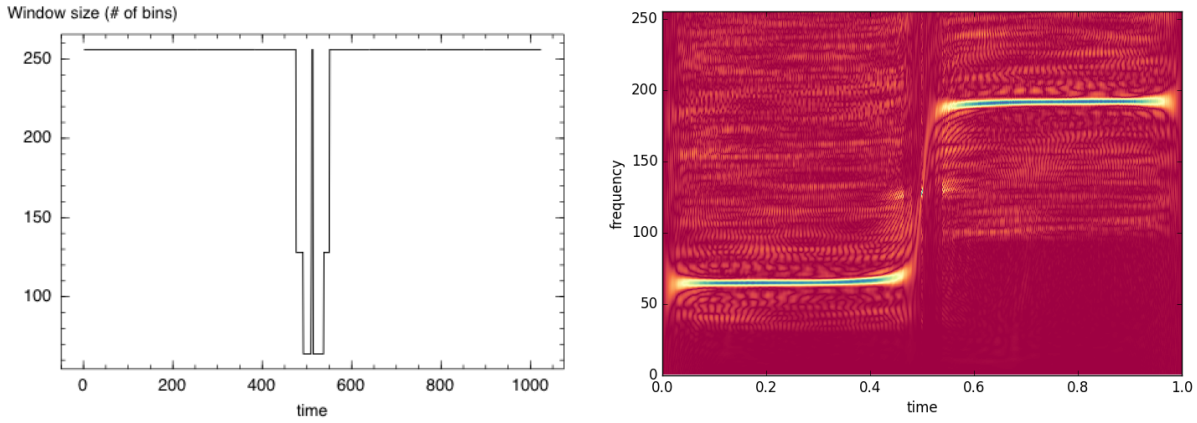

Figure 6: Adaptive algorithm による TFD と Window size.

の定数、一次関数、二次関数の 3 成分 IF、
M2:

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial \psi_1(t)}{\partial t} = 10\cos(\pi t) + 15 \tag{64}$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial \psi_2(t)}{\partial t} = -10\sin(\pi t) + 50 \tag{65}$$

の正弦波の 2 成分 IF となる。

∗ ∗ ∗ **Juwvid** ∗ ∗ ∗

本 Section の対応 notebook は、

- **S-Method.ipynb**
- **L-Wigner Distribution and Polynomial Wigner Ville Distribution.ipynb**

である。

5.1 S-method

Section 3.5 でみたように、Pseudo Wigner distribution には、シグナルの二次を用いることによる cross talk が見えていた。STFT はシグナルの一次であるために、この cross talk は見えない。この両者の間の妥協点を探す方法が S-method である。

まず共役対称な Window $W(\tau) = w(\tau/2)w^*(-\tau/2)$ を持つ Pseudo Wigner Distribution

$$\rho(f,t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau/2)w^*(-\tau/2)z(t+\tau/2)z^*(t-\tau/2)e^{-2\pi i f\tau}d\tau \tag{66}$$

$$\tag{67}$$

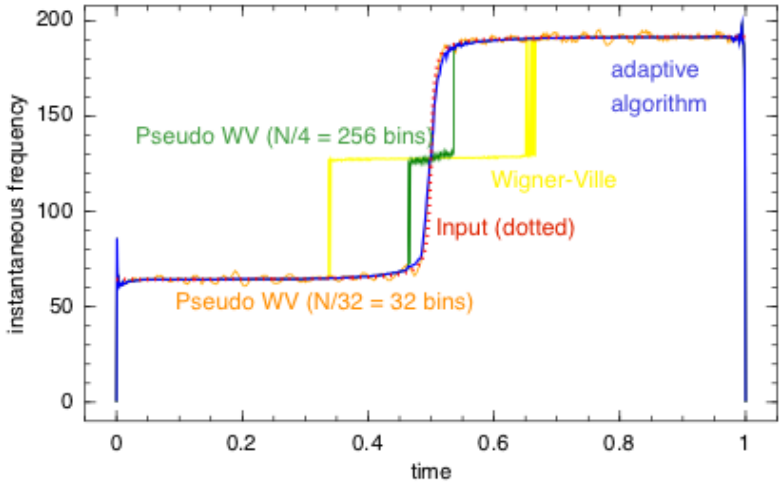

Figure 7: Adaptive algorithm を含むさまざまな場合の etimated IF.

を STFT

$$S(f,t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) z(t+\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \tag{68}$$

$$\tag{69}$$

で表現することを考える。$\tau' = \tau/2$ とすると

$$\rho(f,t) = 2\int_{-\infty}^{\infty} w(\tau') w^*(-\tau') z(t+\tau') z^*(t-\tau') e^{-2\pi i (2f)\tau'} d\tau' \tag{70}$$

$$= 4S(2f,t) * S^*(2f,t) \tag{71}$$

である。ただし convolution は $2f$ についての convolution である。

ここで convolution

$$C = C(y) = A(x) * B(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x) B(y-x) dx \tag{72}$$

の変数変換 $Y = y/2$、$x = Y + \theta/2$ により

$$C = C(Y) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} A(Y+\theta/2) B(Y-\theta/2) d\theta \tag{73}$$

$$\tag{74}$$

を用いて ($Y = y/2 = 2f/2 = f$ の対応)、

$$\rho(f,t) = 2\int_{-\infty}^{\infty} S(f+\theta/2, t) S^*(f-\theta/2, t) d\theta \tag{75}$$

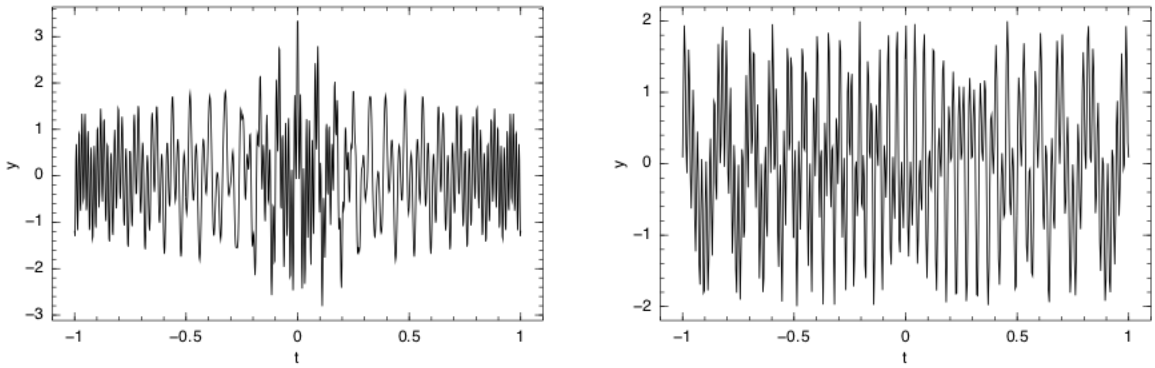

Figure 8: 多成分 IF データ。左：**M1** $y(t) = e^{-t^2}\cos\psi_1(t) + \cos\psi_2(t) + 1.5e^{-25t^2}\cos\psi_3(t), \psi_1(t) = 25\pi t, \psi_2(t) = 120t^3 + 45\pi t, \psi_3(t) = 40\pi t^2 + 150\pi t$ 右：**M2** $y(t) = \cos\psi_1(t) + \sin\psi_2(t), \psi_1(t) = 20\sin(\pi t) + 30\pi t, \psi_2(t) = 20\cos(\pi t) + 100\pi t$.

となることがわかる。さてこの形で書くと pseudo Wigner distribution でなぜ cross talk が出るかより明確になる。単成分の時は、IF の部分で STFT のシグナルが強めあうが、二つの IF があると $f_1 = f - \theta/2, f_2 = f + \theta/2$ となるような f、すなわち $f = \frac{f_1+f_2}{2}$ のところに cross talk が生じる。

S-Method は、式 (75) の convolution に Window $P(\theta)$ をつけて cross talk を抑える効果を導入する:

$$\rho(f,t) = 2\int_{-\infty}^{\infty} P(\theta)S(f+\theta/2,t)S^*(f-\theta/2,t)d\theta \tag{76}$$

Window を最大限広く取った場合、つまり $P(\theta) = 1$ の場合は先ほどみたように Pseudo Wigner distribution となる。また反対に最大限狭く取った場合、つまり $P(\theta) = \delta_D(\theta)/2$ の場合は Spectrogram に一致する。

通常は、$P(\theta)$ を

$$P(\theta) = \begin{cases} 1 & |\theta| < L_p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{77}$$

のように、凸 step 関数として、L_p を調整することで cross talk が出ないようにする。L_p を小さくしすぎると Spectrogram に近づいていくため情報がなまるので、cross talk が出ない範囲でもっとも大きい L_p を選ぶと良い。図 9 は、**M1** データを、pseudo Wigner から、S-method、そして Spectrogram まで $P(\theta)$ を変化させた図である。この場合、$L_p = 6$ が cross-talk の抑制と sharp さの最適値となっている事が分かる。

5.2 Higher Order Wigner Distribution

これまで、シグナルの一次の STFT, 二次の Wigner distribution をみてきたが、さらに高次の TFD も研究されている。代表的な二つが L-Wigner Distribution

$$\rho(f,t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)x^L(t+\tau/2L)x^{*L}(t-\tau/2L)e^{-2\pi i f\tau}d\tau \tag{78}$$

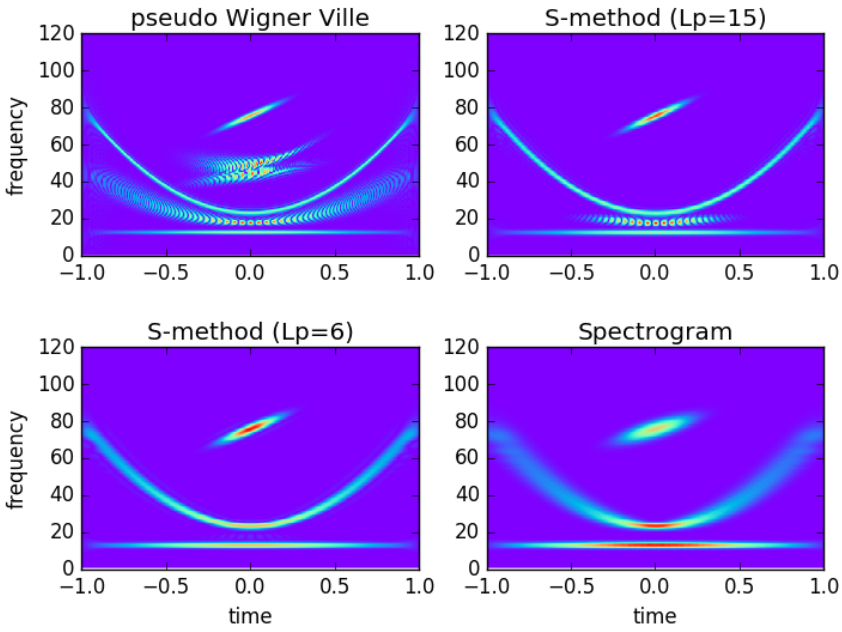

Figure 9: **M1** データの pseudo Wigner distribution, S-method (a small window), S-method (a large window), Spectrogram.

と Polynomial Wigner distribution (4 次)

$$\rho(f,t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t+\tau/4)x^{*2}(t-\tau/4)x^*(t+A\tau/2)x(t-A\tau/2)e^{-2\pi i f\tau}d\tau \tag{79}$$

がある ($A = 0.95/1.35$)。本稿ではこれらの分布の詳細は割愛するが、これらの高次 Wigner 分布は、多成分 IF に強い。また、polynomial Wigner 分布は、IF が多項式との仮定で導かれているため、非線形 IF に対して有効である。図 10 に、**M2** の結果だけ表示しておく。

6 楽しげな応用

6.1 重力波

GW 150914 のデータを各種 TFD で例を図 11 に示す。

References

[1] Boashash, B. 2015, Time-Frequency Signal Analysis and Processing, 2nd Edition A Comprehensive Reference (Elsevier)

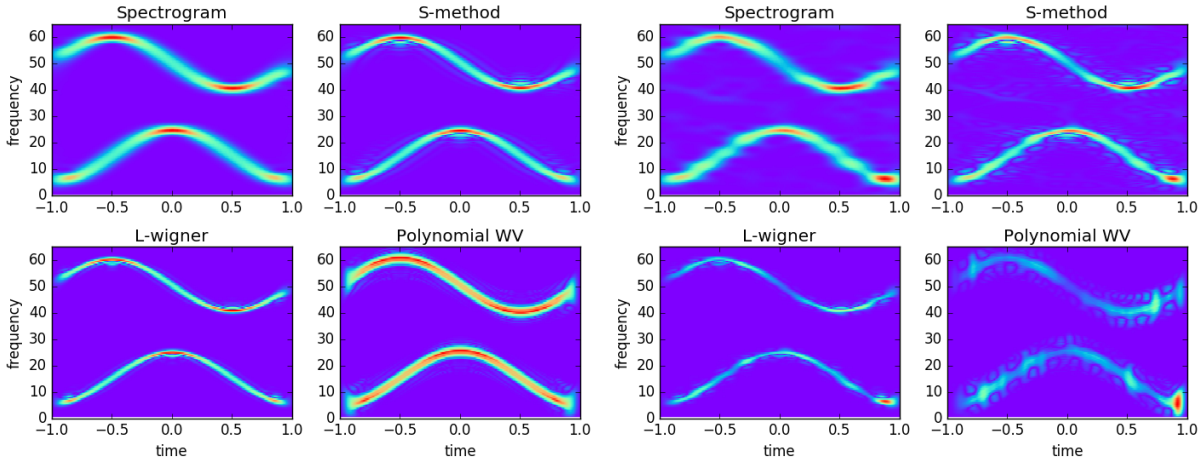

Figure 10: **M2** データに対する Spectrogram, S-method, L-wigner ($L = 2$), polynomial Wigner 分布の適用例。左はノイズ無し、右は 50% STD ノイズいり。

[2] Cohen, L. 1995, Time-frequency analysis

[3] Stankovic, L., Daković, M., & Thayaparan, T. 2013, Time-frequency signal analysis with applications (Artech House)

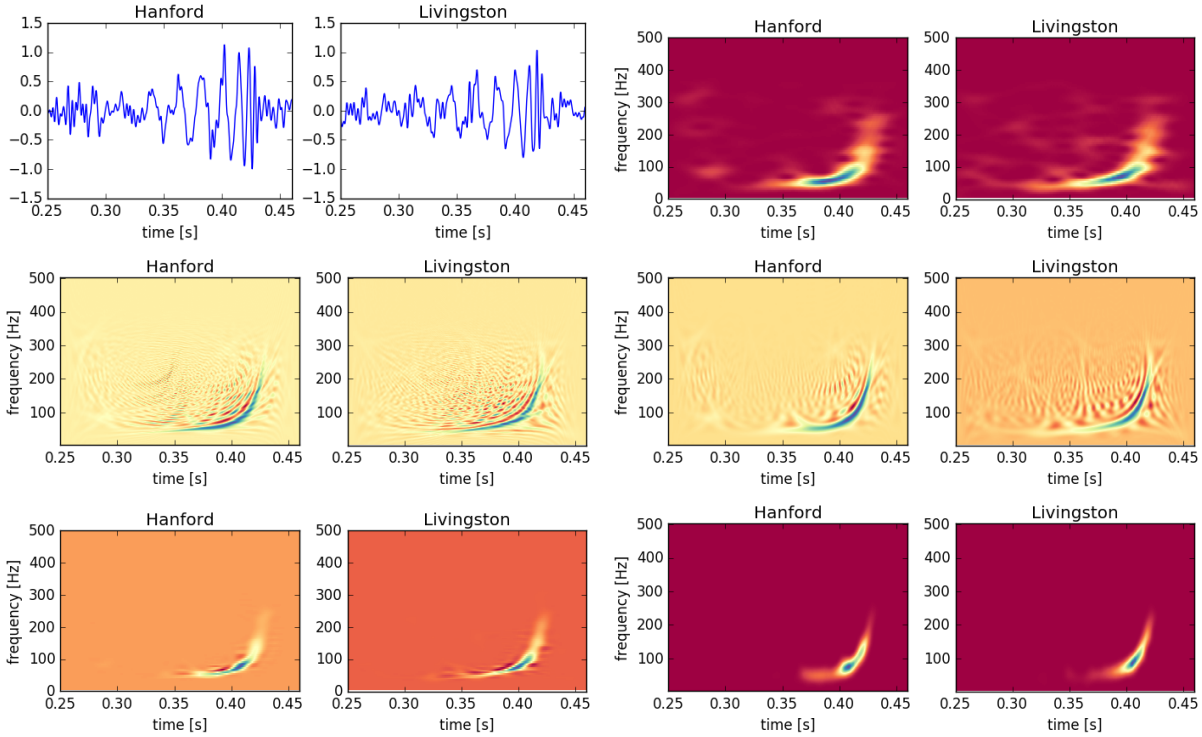

Figure 11: データ、Spectrogram, WV, PWV, L-Wigner, Polynomial.